

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Comme chaque année, les candidats tireront profit de la lecture des précédents rapports qui contiennent des remarques et conseils valables lors de cette session.

→ Le sujet était composé de trois problèmes indépendants. Le premier concernait l'étude d'une fonction puissance dont on cherche à exprimer l'intégrale sur $[0, 1]$ et qui intervenait dans la nature d'un point critique d'une fonction de deux variables. Le deuxième mettait en jeu l'étude d'une série de Fourier afin de calculer une limite intégrale. Enfin, le troisième portait sur l'utilisation de variables de Rademacher dans diverses situations. Le sujet était particulièrement long cette année et de difficulté globalement croissante.

L'ensemble des trois problèmes mobilisait de larges connaissances de cours s'étalant sur les programmes de première ou de deuxième année de classes préparatoires aux grandes écoles. Il est apparu, comme l'année dernière, que le cours est trop souvent mal connu, ce qui a pénalisé un grand nombre de candidats.

De nombreuses lacunes se sont faites particulièrement ressentir sur le programme de première année : le calcul de dérivées, la représentation graphique, l'équation de la tangente, les développements limités et applications, les nombres complexes, le raisonnement par récurrence, la formule des probabilités totales ... Signalons également un défaut de maîtrise des concepts de base d'algèbre linéaire avec les définitions d'éléments propres, les diverses caractérisations de matrices inversibles, les conditions suffisantes de diagonalisation, les méthodes pour trouver une base de l'image, calculer la puissance d'une matrice. La réduction ne se réduit pas à l'étude du polynôme caractéristique. Les différents confinements et cours à distance ont sans doute accentué ces difficultés.

Les correcteurs tiennent à souligner l'effort de présentation des copies pour le plus grand nombre : les résultats sont souvent mis en valeur et les copies pour la plupart sont correctement lisibles. Quelques candidats traitent les questions totalement dans le désordre effectuant des va-et-vient entre le début et la fin d'un problème, ce qui n'est ni agréable pour le correcteur ni profitable pour le candidat quand on sait que les questions s'enchaînent pour en faciliter leur résolution.

Cependant il serait appréciable de voir des références explicites aux questions précédentes quand elles sont utilisées, de voir le nom des théorèmes et formules employées : théorème d'intégration terme à terme, formule d'Euler, formule d'intégration par parties, croissances comparées... À ce sujet, les abréviations comme IPP ou FPT n'ont pas leur place dans une copie correctement rédigée si elles n'ont pas été définies auparavant.

Il peut être utile de rappeler que se contenter d'affirmer un résultat donné dans l'énoncé sans y ajouter la moindre justification n'apporte aucun point et ne donne pas une bonne impression générale sur l'ensemble de la copie. L'utilisation des symboles d'équivalence et d'implication est fortement déconseillée, vu l'emploi qui leur est réservé. Enfin, les correcteurs apprécieraient davantage de soin porté sur l'orthographe et les différents accords grammaticaux.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Problème I.

Q1. Cette question n'a en général pas posé problème. L'expression « composée de fonctions » était attendue. Des candidats se contentent de dériver pour justifier la dérivabilité, souvent sans succès dans le calcul. D'autres justifient la dérivabilité en évoquant la continuité. On notera également que la fonction g n'est pas polynomiale.

Q2. Le calcul de la dérivée a posé de nombreux problèmes. Par ailleurs, beaucoup de candidats ne savent pas justifier les calculs de limite. Les correcteurs ont sanctionné la situation, heureusement rare, où seul un tableau de variations est présenté, sans aucun détail ni justification.

Q3. L'équation de la tangente n'est pas connue d'un grand nombre de candidats.

Q4. La plupart des candidats ne savent pas exploiter le développement limité pour trouver la position relative de la tangente au voisinage d'un point.

Q5. Les correcteurs ont été surpris de découvrir de nombreux graphiques où les tangentes sont non tangentes à la courbe.

Q6. L'encadrement demandé dans l'énoncé est juste, quoiqu'un peu artificiel, il aurait été plus naturel de demander un encadrement de l'intégrale entre $g(e^{-1})$ et 1. Si l'un ou l'autre des encadrements a été donné, le candidat a obtenu la totalité des points. Les candidats ayant mis en avant la compréhension graphique de la notion d'aire sous la courbe ont été valorisés.

Q7. La question a été majoritairement bien traitée. De rares candidats ne connaissent pas les primitives usuelles.

Q8. Il ne suffit pas d'évoquer que « x l'emporte sur $\ln(x)$ » ou encore que « x a l'avantage sur $\ln(x)$ ». L'énoncé donnant la valeur limite et demandant de la justifier, l'expression « croissances comparées » est attendue dans cette question.

Q9. Même si les fonctions de l'intégration par parties sont bien posées, beaucoup ne savent pas dériver $x \rightarrow (\ln x)^k$. Dans ce cas, il est souvent regrettable de ne pas aboutir sur une formule cohérente avec la dérivée donnée, les candidats cherchant à retomber par la formule donnée dans l'énoncé.

Q10. L'énoncé indique que l'initialisation doit s'effectuer pour $k = 0$ et non $k = 1$ comme cela a parfois été écrit. Cette initialisation a souvent été bien traitée ainsi que le cas $(n, k) = (0, 0)$. Il est important de justifier chaque étape dans l'hérédité en citant soit l'hypothèse de récurrence soit la question ou la propriété utilisée. Certains, au cours de l'hérédité, ont re-détaillé l'intégration par parties effectuée en Q9.

Q11. Bien que le bon développement en série entière de l'exponentielle soit souvent donné, son rayon de convergence, qui par définition est un nombre et non un domaine, n'est pas toujours correct. Certains élèves confondent développement en série entière et développement limité.

Q12. Les correcteurs ont tenu compte du fait que le programme de la filière TSI ne permet pas de justifier rigoureusement l'échange série-intégrale, en valorisant les explications cohérentes de certains candidats.

Q13. Question bien traitée pour ceux qui se réfèrent aux questions précédentes.

Q14. Peu d'étudiants ont abordé la question. Certains ont malgré tout bien géré la boucle « tant que ».

Q15. Beaucoup proposent comme ensemble de définitions l'ensemble des réels alors que la fonction est une fonction de deux variables.

Q16. Le calcul des dérivées partielles a posé beaucoup de problèmes. Certains ont malgré tout parfaitement traité cette question.

Q17. Trop souvent les candidats évoquent le développement limité de $x \rightarrow (1 + x)^\alpha$. Par ailleurs, lorsqu'il est utilisé, celui de $x \rightarrow \ln(1 + x)$ au voisinage de 0 est trop souvent malmené.

Q18. Question peu abordée. Se contenter de $f(1,1) = 0$ n'est pas suffisant pour donner la nature d'un point.

3/ CONCLUSION

Comme les années passées, les correcteurs souhaitent mettre l'accent sur l'importance de l'apprentissage du cours : définitions aux énoncés complets (hypothèses et conclusions), nom des théorèmes et formules. Ce manque d'apprentissage a pénalisé un grand nombre de candidats.

Les correcteurs invitent les candidats à mettre en valeur le numéro des questions et les résultats apportant une réponse aux questions et dans la mesure du possible à traiter les questions dans l'ordre.

Enfin, les démarches pour obtenir un résultat, souvent donné dans l'énoncé, doivent être justifiées et argumentées de façon précise. La rigueur et l'honnêteté intellectuelle sont autant de qualités indispensables pour tout futur ingénieur.